



EDITAL 02/2026 – PROVA ESCRITA

CAMPUS: Maracanã

Área de Conhecimento: Engenharia Elétrica - Sistemas Elétricos de Potência

Questão 1 (2,0 pontos – Item a: 0,7 ponto; Item b: 0,3 ponto; Item c: 1,0 ponto)

Item a) Expressão da corrente de falta bifásica-terra (0,7 ponto)

1º passo: Montagem da rede de sequência positiva, negativa e zero (0,2 ponto)

2º passo: Obtenção das tensões na barra em falta k (0,2 ponto)

- $I_{fa} = 0$; $V_{kb} = V_{kc} = (I_{fb} + I_{fc})Z_f$
- $I_{fa}^0 = \frac{(I_{fb} + I_{fc})}{3} \rightarrow V_{kb} = V_{kc} = 3 Z_f I_{fa}^0$
- $\begin{bmatrix} V_{ka}^0 \\ V_{ka}^1 \\ V_{ka}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ka} \\ V_{kb} \\ V_{kc} \end{bmatrix}$
- Podemos observar que:
 - $V_{ka}^1 = V_{ka}^2$
 - $3 V_{ka}^0 = (V_{ka}^0 + V_{ka}^1 + V_{ka}^2) + 6 Z_f I_{fa}^0$
 - $V_{ka}^1 = V_{ka}^2 = V_{ka}^0 - 3 Z_f I_{fa}^0$
 - $(I_{fa}^0 + I_{fa}^1 + I_{fa}^2) = 0$

3º passo: Obtenção do circuito equivalente(opcional) e dedução das correntes de falta (0,3 ponto)

Essas são características do circuito equivalente da Figura a.3:

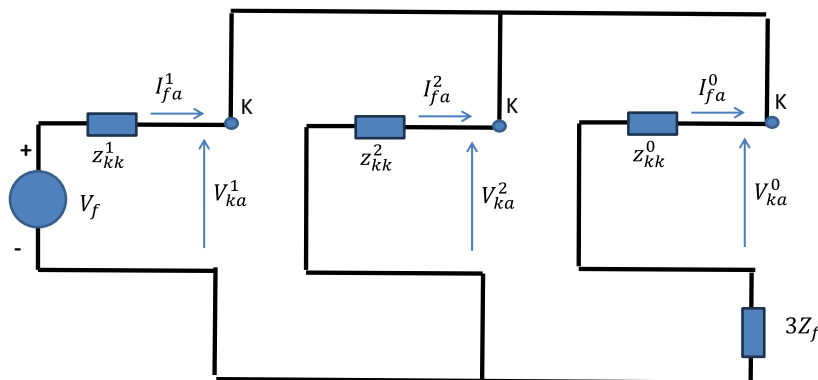


Figura a.3 – Circuito equivalente – Rede de Sequência

$$I_{fa}^1 = \frac{V_f}{Z_{kk}^1 + \frac{Z_{kk}^2 (Z_{kk}^0 + 3Z_f)}{Z_{kk}^2 + Z_{kk}^0 + 3Z_f}}$$



$$I_{fa}^2 = -I_{fa}^1 \frac{Z_{kk}^0 + 3Z_f}{Z_{kk}^2 + Z_{kk}^0 + 3Z_f}$$

$$I_{fa}^0 = -I_{fa}^1 \frac{Z_{kk}^2}{Z_{kk}^2 + Z_{kk}^0 + 3Z_f}$$

Item b) Constante de tempo (τ) associada ao decaimento da componente contínua da corrente de curto-circuito assimétrica (0,3 ponto)

1º passo: Estabelecer a relação entre a impedância equivalente na barra em falta com as matrizes Zbarra de sequencias obtidas no 1º passo do item a. (0,15 ponto)

2º passo: Apresentar a expressão para a constante de tempo (τ) (0,15 ponto)

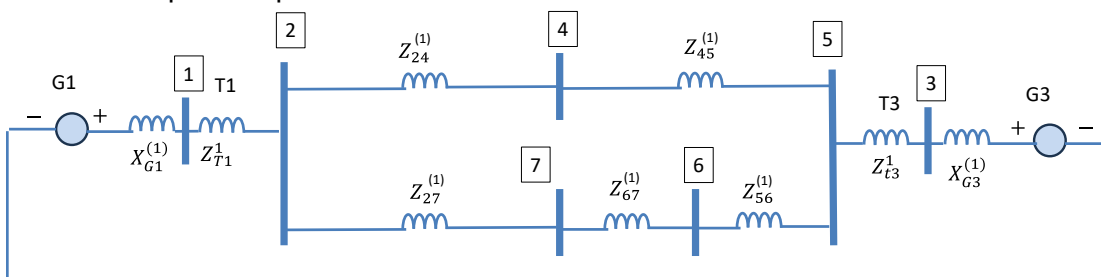
$$\tau = \frac{X}{\omega R}$$

A reatância X e a resistência R são da impedância equivalente da barra 7.

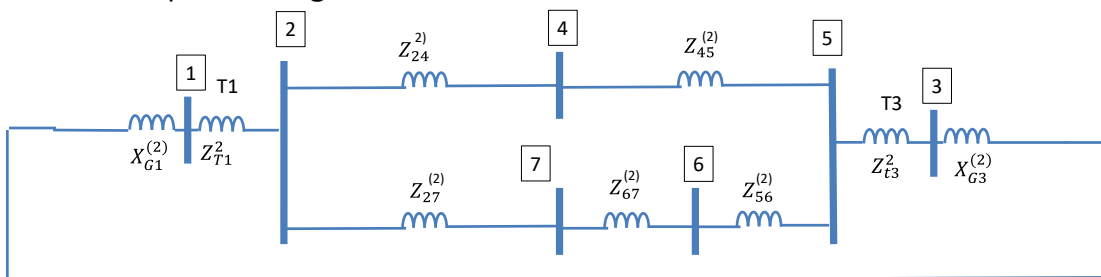
$$Z_{eq} = Z_{77}^1 + \frac{Z_{77}^2(Z_{77}^0 + 3Z_f)}{Z_{77}^2 + Z_{77}^0 + 3Z_f}$$

As impedâncias Z_{77}^1 , Z_{77}^2 e Z_{77}^0 , são elementos da matriz Zbarra de sequência positiva, negativa e zero respectivamente, obtidas dos seguintes sistemas:

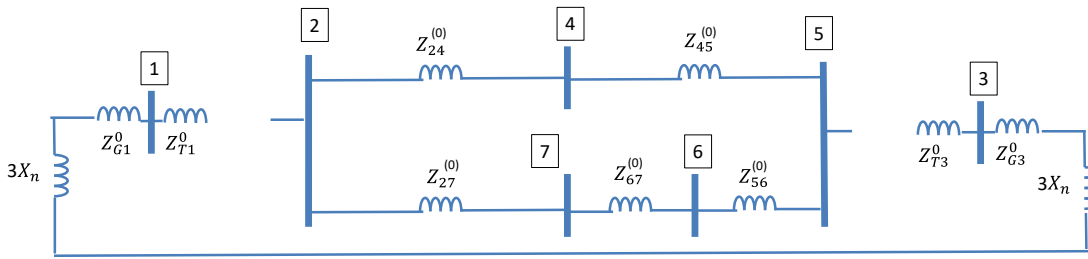
- Rede de sequência positiva



- Rede de sequência negativa



- Rede de sequência zero



Item c) Falta de um condutor aberto (1,0 ponto)

Considere que a impedância de sequência positiva, negativa e zero entre as barras 2 e 4 sejam Zb_{24}^1 , Zb_{24}^2 e Zb_{24}^0 respectivamente. Z_{mn}^x são elementos das matrizes Z_{barra}^x obtidas no item b, onde $x = 1$ (sequência positiva), 2 (sequência negativa) e 0 (sequência zero) e $m, n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ou 7.

1º passo: Estabelecer a relação entre a impedância equivalente na barra em falta (0,25 ponto)

2º passo: Cálculo da impedância equivalente entre as barras 2 e 4: (0,25 ponto)

Z thevenin entre as barras 2 e 4:

$$Z_{Th24}^1 = Z_{22}^1 + Z_{44}^1 - 2 Z_{24}^1$$

$$Z_{Th24}^0 = Z_{22}^0 + Z_{44}^0 - 2 Z_{24}^0$$

3º passo: Cálculo da impedância entre os pontos P2 e P4 (0,25 ponto)

Impedância entre os pontos P2 e P4:

$$Z_{P2P4}^1 = \frac{-(Zb_{24}^1)^2}{Z_{Th24}^1 - Zb_{24}^1}$$

$$Z_{P2P4}^2 = \frac{-(Zb_{24}^2)^2}{Z_{Th24}^2 - Zb_{24}^2}$$

$$Z_{P2P4}^0 = \frac{-(Zb_{24}^0)^2}{Z_{Th24}^0 - Zb_{24}^0}$$

4º passo: Cálculo da variação das tensões: (0,25 pontos)

$$V_a^0 = V_a^1 = V_a^2 = I_{24} \frac{Z_{P2P4}^0 * Z_{P2P4}^1 * Zb_{P2P4}^2}{(Z_{P2P4}^0 * Z_{P2P4}^1) + (Z_{P2P4}^1 * Z_{P2P4}^2) + (Z_{P2P4}^2 * Z_{P2P4}^0)}$$

$$\Delta V_4^0 = \frac{Z_{24}^0 - Z_{44}^0}{Zb_{24}^0} V_a^0$$

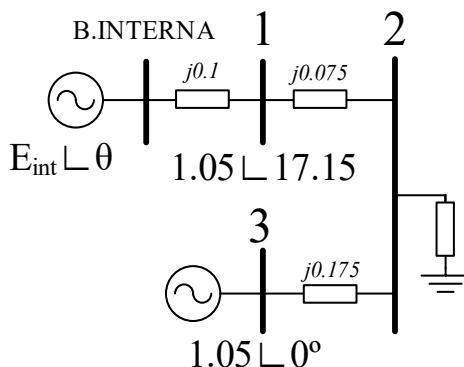
$$\Delta V_4^1 = \frac{Z_{24}^1 - Z_{44}^1}{Zb_{24}^1} V_a^1$$



$$\Delta V_4^2 = \frac{Z_{24}^2 - Z_{44}^2}{Z_{b24}^2} V_a^1$$

Questão 2 (2,0 pontos – Item a: 1,0 ponto; Item b: 1,0 ponto)

Item a) Equação Swing (1,0 ponto)



Cálculo da tensão interna (0,3 ponto):

$$S = V \times I^*$$

$$1 + j3.543 = 3.68141942734049 \angle 74.2384561988585^\circ = 1.05 \angle 17.15 \times I^*$$

$$I = 3.50611374032428 \angle -57.0884561988585 \text{ p.u.}$$

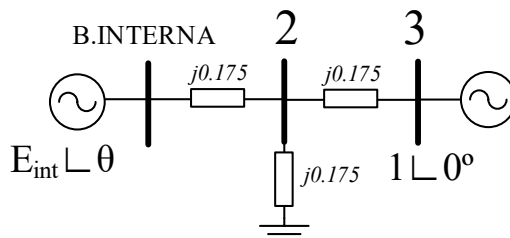
$$E_{int} = V_1 + I \times j0.1$$

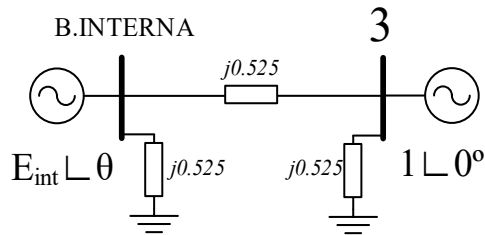
$$E_{int} = 1.05 \angle 17.15 + 3.506 \angle -57.09 \times j0.1$$

$$E_{int} = 1.39069347291231 \angle 21.0768287737822^\circ$$

Redução do sistema (0,2 ponto):

Conversão Y-Delta das impedâncias do sistema





Equação swing (0,5 ponto):

$$\frac{2H}{\omega_s} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = P_m - P_e$$

$$P_e = \frac{E_{int} \times 1}{0.525} \text{sen}(\delta)$$

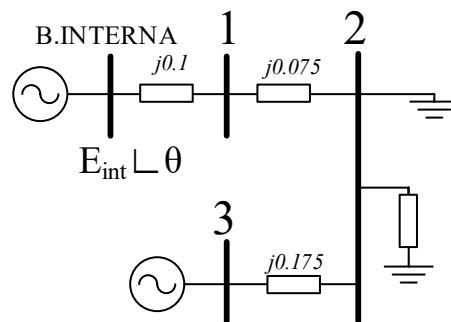
$$P_e = \frac{1.39 \times 1}{0.525} \text{sen}(\delta) = 2.78138694582462 \times \text{sen}(\delta)$$

$$P_m = 1$$

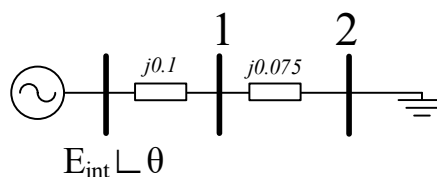
$$\frac{2 \times 5}{\omega_s} \frac{d^2 \delta}{dt^2} = 1 - 2.7814 \times \text{sen}(\delta)$$

Item b) ângulo e tempo crítico considerando um curto na barra 2 (1,0 ponto)

Quando o curto é aplicado:



logo



Nº



Nessa situação, a tensão da barra 2 é zero, fazendo com que a potência elétrica do gerador também seja zero.

O ângulo δ inicial, pré-falta, é dado por:

$$\delta_1 = 21.0768287737822^\circ = 0.367860057981579rad$$

$$\delta_{max} = \pi - \delta_1 = 158.923171226218^\circ = 2.77373259560821rad$$

O ângulo crítico é dado por (0,5 ponto):

$$\delta_c = \cos^{-1}([\pi - 2 \times \delta_1] \times \sin \delta_1 - \cos \delta_1)$$

$$\delta_c = 1.6387490284963rad = 93.8934030140017^\circ$$

O tempo crítico é dado por (0,5 ponto):

$$t_c = \sqrt{\frac{4 \times H \times (\delta_c - \delta_1)}{\omega_s P_m}} = 0.259658918441345 \text{ seg}$$

Questão 3 (2,0 pontos)

Determine o **estado operativo** (magnitudes e ângulos das tensões) do sistema elétrico de duas barras através do cálculo do Fluxo de Potência. Utilize a formulação por injeções de potência em coordenadas polares e aplique o método iterativo de Newton-Raphson .

Dados do Sistema

Barra 1 (Slack): $V_1 = 1,0000 \angle 0^\circ p. u.$

Barra 2 (PQ): $P_2^{esp} = -0,500 p. u. e Q_2^{esp} = +0,1500 p. u.$

Linha 1 – 2: Impedâncias $z_{12} = 0,1000 + j0,4000 p. u.$

e admitâncias $y_{sh} = j0,0300 p. u. \text{ por extremidade.}$

Tolerância: $\epsilon \leq 0,0030 \text{ para os resíduos } |\Delta P| \text{ e } |\Delta Q|.$

Montagem da Matriz Admitância Nodal (Y_{barra}) – (0,5 ponto)

Calculamos a admitância série (y_{12}):

$$y_{12} = \frac{1}{z_{12}} = \frac{1}{0,1 + j0,4} = 0,5882 - j2,3529 p.u.$$



$$Y_{barra} = \begin{bmatrix} 0,5882 - j2,3229 & -0,5882 + j2,3529 \\ -0,5882 + j2,3529 & 0,5882 - j2,3229 \end{bmatrix} \text{ p.u.}$$

Elementos da matriz $Y_{barra} = G + jB$ para a barra 2:

$$G_{22} = 0,5882$$

$$B_{22} = -2,3229$$

$$G_{21} = G_{12} = -0,5882$$

$$B_{21} = B_{12} = 2,3529$$

Primeira iteração completa (0,75 ponto)

Estado Inicial: $V_2^{(0)} = 1,0000 \text{ p.u.}$ e $\theta_2^{(0)} = 0,0000 \text{ rad.}$

Cálculo dos Resíduos:

$$P_2^{calc(0)} = V_2^{2(0)} G_{22} + V_2^{(0)} V_1^{(0)} (G_{21} \cos \theta_{21}^{(0)} + B_{21} \sin \theta_{21}^{(0)}) = 0,0000$$

$$Q_2^{calc(0)} = -V_2^{2(0)} B_{22} + V_2^{(0)} V_1^{(0)} (G_{21} \sin \theta_{21}^{(0)} - B_{21} \cos \theta_{21}^{(0)}) = -0,0300$$

$$\Delta P_2^{(0)} = -0,5000 - 0 = -0,5000$$

$$\Delta Q_2^{(0)} = 0,1500 - (-0,0300) = +0,1800$$

$$\text{Critério: } \max(|-0,5000|, |0,1800|) > 0,0030.$$

Continua.

Primeira Iteração ($h = 0$)

Matriz Jacobiana ($h = 0$):

$$H_{22}^{(0)} = -V_2^{2(0)} B_{22} - Q_2^{calc(0)} = 2,3529$$

$$N_{22}^{(0)} = (P_2^{calc(0)} + V_2^{2(0)} G_{22}) / V_2^{(0)} = 0,5882$$

$$M_{22}^{(0)} = P_2^{calc(0)} - V_2^{2(0)} G_{22} = -0,5882$$

$$L_{22}^{(0)} = (Q_2^{calc(0)} - V_2^{2(0)} B_{22}) / V_2^{(0)} = 2,2929$$

Para determinar as correções das variáveis de estado ($\Delta\theta_2$ e ΔV_2), deve-se resolver o seguinte sistema de equações algébricas lineares, onde os resíduos de potência são relacionados às variações de estado através da matriz Jacobiana:

Nº



$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^{(0)} \\ \Delta Q_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{22}^{(0)} & N_{22}^{(0)} \\ M_{22}^{(0)} & L_{22}^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_2^{(0)} \\ \Delta V_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores numéricos calculados para a primeira iteração, com base nos parâmetros do sistema:

$$\begin{bmatrix} -0,5000 \\ 0,1800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,3529 & 0,5882 \\ -0,5882 & 2,2929 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_2^{(0)} \\ \Delta V_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

Após a resolução do sistema linear e a obtenção do vetor de correção $\Delta x^{(0)}$, as variáveis de estado para a próxima iteração são atualizadas somando-se as correções aos valores atuais. Segundo a formulação clássica, o novo estado é dado por $x^{(h+1)} = x^{(h)} + \Delta x^{(h)}$.

Para a barra 2 (Tipo PQ), os cálculos são:

$$\theta_2^{(1)} = \theta_2^{(0)} + \Delta \theta_2^{(0)}$$

Substituindo os valores:

$$\theta_2^{(1)} = 0,0000 + (-0,2181) = -0,2181 \text{ rad}$$

$$V_2^{(1)} = V_2^{(0)} + \Delta V_2^{(0)}$$

Substituindo os valores:

$$V_2^{(1)} = 1,0000 + 0,0226 = 1,0226 \text{ p.u.}$$

Novo Estado Operativo Estimado: Com estes novos valores ($V_2 = 1,0226$ e $\theta_2 = -0,2181$), o algoritmo retorna ao cálculo dos novos resíduos de potência para verificar a convergência na iteração seguinte.

Cálculo dos Resíduos: Utilizando os valores de tensão e ângulo obtidos, calcula-se as injeções de potência:

$$P_2^{calc(1)} = V_2^{2(1)} G_{22} + V_2^{(1)} V_1^{(1)} (G_{21} \cos \theta_{21}^{(1)} + B_{21} \sin \theta_{21}^{(1)}) = -0,4929$$

$$Q_2^{calc(1)} = -V_2^{2(1)} B_{22} + V_2^{(1)} V_1^{(1)} (G_{21} \sin \theta_{21}^{(1)} - B_{21} \cos \theta_{21}^{(1)}) = 0,2100$$

$$\Delta P_2^{(1)} = -0,5000 - (-0,4929) = -0,0071$$

$$\Delta Q_2^{(1)} = 0,1500 - 0,2100 = -0,0600$$

$$\text{Critério: } \$ \max(|-0,0071|, |-0,0600|) = 0,0600 > 0,0030\$. - \text{Continua.}$$

Segunda Iteração ($h = 1$)

$$\text{Estado: } V_2^{(1)} = 1,0226 \text{ p.u. e } \theta_2^{(1)} = -0,2181 \text{ rad.}$$



Segunda iteração completa (0,75 ponto)

Matriz Jacobiana ($h = 1$): Calculada no ponto operativo atual:

$$H_{22}^{(1)} = -V_2^{2(1)} B_{22} - Q_2^{calc(1)} = 2,2191$$

$$N_{22}^{(1)} = (P_2^{calc(1)} + V_2^{2(1)} G_{22}) / V_2^{(1)} = 0,1195$$

$$M_{22}^{(1)} = P_2^{calc(1)} - V_2^{2(1)} G_{22} = -1,1080$$

$$L_{22}^{(1)} = (Q_2^{calc(1)} - V_2^{2(1)} B_{22}) / V_2^{(1)} = 2,5808$$

Para determinar as correções das variáveis de estado ($\Delta\theta_2$ e ΔV_2), resolve-se o sistema linear:

$$\begin{bmatrix} -0,0071 \\ -0,0600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,2191 & 0,1195 \\ -1,1080 & 2,5808 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_2^{(1)} \\ \Delta V_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

Atualização das Variáveis: Após a resolução do sistema linear, obtêm-se as correções para atualizar o estado operativo:

$$\theta_2^{(2)} = \theta_2^{(1)} + \Delta\theta_2^{(1)}$$

Substituindo os valores:

$$\theta_2^{(2)} = -0,2181 + (-0,0019) = -0,2200 \text{ rad}$$

$$V_2^{(2)} = V_2^{(1)} + \Delta V_2^{(1)}$$

Substituindo os valores:

$$V_2^{(2)} = 1,0226 + (-0,0241) = 0,9985 \text{ p.u.}$$

Novo Estado Operativo Estimado: Com estes novos valores ($V_2 = 0,9985$ e $\theta_2 = -0,2200$), o algoritmo procede para a verificação final da convergência.

Cálculo dos Resíduos: Utilizando os valores atualizados do estado operativo para calcular as injeções de potência finais na barra de carga:

$$P_2^{calc(2)} = V_2^{2(2)} G_{22} + V_2^{(2)} V_1^{(2)} (G_{21} \cos \theta_{21}^{(2)} + B_{21} \sin \theta_{21}^{(2)}) = -0,5008$$

$$Q_2^{calc(2)} = -V_2^{2(2)} B_{22} + V_2^{(2)} V_1^{(2)} (G_{21} \sin \theta_{21}^{(2)} - B_{21} \cos \theta_{21}^{(2)}) = 0,1515$$

Calculando a diferença entre os valores especificados e os valores calculados:

$$\Delta P_2^{(2)} = P_2^{esp(2)} - P_2^{calc(2)} = -0,5000 - (-0,5008) = 0,0008$$



$$\Delta Q_2^{(2)} = Q_2^{esp(2)} - Q_2^{calc(2)} = 0,1500 - 0,1515 = -0,0015$$

Teste de Convergência: Com base no critério de tolerância adotado ($\epsilon = 0,0030$), verificamos os valores absolutos dos resíduos:

$$|\Delta P_2^{(2)}| = 0,0008 \leq 0,0030\$$$

$$|\Delta Q_2^{(2)}| = 0,0015 \leq 0,0030\$$$

Como ambos os resíduos de potência ativa e reativa situam-se dentro da faixa de tolerância especificada, o processo iterativo de Newton-Raphson é encerrado.

Estado operativo final:

Magnitude da Tensão (V_2): 0,9985 p. u.

Ângulo da Tensão (θ_2): $-0,2200$ rad (equivalente a $-12,6051^\circ$).

Uma vez conhecido o estado (magnitudes e ângulos de tensão em todas as barras), o fluxo de potência ativa e reativa na linha de transmissão pode ser calculado diretamente.

Questão 4 (2,0 pontos – Item a: 1,0 ponto; Item b: 0,5 ponto; Item c: 0,5 ponto)

Item a: 1,0 ponto

- As usinas tradicionais possuem um maior controle de suas fontes de energia primária, muitas das vezes podendo serem estocadas. Isso permite um maior planejamento do despacho das usinas que estão sob o comando do operador do sistema. Por outro lado, as IBRs (parques eólicos e solares centralizados) utilizam recursos inflexíveis (sol e vento), o que reduz a flexibilidade das usinas, impossibilitando, por exemplo, o aumento da geração para suprir um pico de demanda, caso ela já esteja gerando o máximo possível que a sua fonte primária permite naquele instante. Ainda, ela impõe ao operador uma grande variabilidade diária, cujo declínio de geração, no caso das solares, coincide historicamente com o aumento natural da demanda **(0,5 ponto)**.
- As usinas tradicionais acoplam-se eletromecanicamente através de geradores síncronos, ao passo que as IBRs se conectam via conversores de potência, operando com dinâmicas de sincronismo e controle de tensão fundamentalmente diferentes das máquinas rotativas, além de possuírem mais limitações de injeção de corrente em momentos de eventos na rede **(0,5 ponto)**.

Item b: 0,5 ponto



- A geração distribuída atua de forma descentralizada diretamente nos centros de consumo, suprimindo a carga local e reduzindo drasticamente a demanda aparente (demanda líquida) que precisa ser atendida pelo operador do sistema ao longo dos períodos de alta insolação **(0,25 ponto)**.
- A interrupção acelerada da geração solar no fim da tarde, que coincide com o aumento natural do consumo no horário de ponta, exige que as usinas despacháveis realizem uma rampa de subida de potência extremamente rápida e severa para garantir o balanço carga-geração contínuo do sistema (curva do pato / ganso) **(0,25 ponto)**.

Item c: 0,5 ponto

- A substituição de máquinas síncronas convencionais por IBRs remove do sistema grandes massas rotativas, diminuindo severamente a energia cinética armazenada, visto que usinas solares e eólicas baseadas em inversores não fornecem inércia física inerente à rede. Com a forte redução da inércia sistêmica total, a rede elétrica sofre um agravamento imediato em sua taxa de variação de frequência (RoCoF) após distúrbios severos de desbalanço ativo, tornando o sistema mais suscetível à instabilidade de frequência **(0,25 ponto)**.
- Diferentemente dos geradores síncronos, os conversores eletrônicos possuem limites térmicos restritos que limitam a injeção de corrente transitória a valores nominais ou muito próximos a 1 p.u.. Essa falta de injeção natural de elevada sobrecorrente degrada o suporte de tensão durante as faltas e afeta drasticamente a sensibilidade, a detecção e o funcionamento confiável dos sistemas de proteção tradicionais da rede **(0,25 ponto)**.

Questão 5 (2,0 pontos – Item a: 1,0 ponto; Item b: 1,0 ponto)

Item a) Cálculo das impedâncias pelo método de Carson (1,0 ponto)

1º passo: obter as distâncias D_{xy} relativas entre os cabos, onde x e y são as fases **a, b, c** e os para-raios **u** e **w**.

$$D_{ac} = D_{AC} ; D_{bc} = D_{CB} ; D_{ab} = D_{AC} + D_{CB} ; D_{uw} = D_{PR}$$

$$D_z = D_6 - D_4 + D_2$$

$$D_{z2} = D_{AC} - D_1$$

$$D_{z3} = D_{AC} + D_{CB} - D_1$$

$$D_{ua} = D_{wb} = \sqrt{D_1^2 + D_z^2} ; D_{uc} = D_{wc} = \sqrt{D_{z2}^2 + D_z^2} ; D_{ub} = D_{wa} = \sqrt{D_{z3}^2 + D_z^2}$$

2º passo: obter as impedâncias primitivas: (0,4 pontos)

“A partir das equações 4.50 – 4.52 do Anderson”

- Impedância própria primitiva:

$$\circ \bar{z}_{pq} = r_p + j\omega k \left(\ln \frac{2l}{D_{sp}} - 1 \right), p=q \text{ onde } p \text{ e } q = a,b,c,u,w$$



-
- Impedância mútua primitiva linha-linha:
 - $\bar{z}_{pq} = j\omega k \left(\ln \frac{2l}{D_{pq}} - 1 \right)$, $p \neq q$ onde p e $q = a, b, c, u, w$
-
- Impedância mútua primitiva linha-terra:
 - $\bar{z}_{pd} = j\omega k \left(\ln \frac{2l}{D_{pd}} - 1 \right)$, $p \neq q$ onde $p = a, b, c, u, w$ e d é o solo.

3º passo: obter a matriz de impedâncias: (0,4 pontos)

“A partir das equações 4.171 do Anderson”

- Quando $p = q \Rightarrow z_{pq} = (r_p + r_d) + j\omega k \left(\ln \frac{D_e}{D_{pq}} \right)$, onde:
 r_p = resistência dos cabos a, b, c, u ou w , r_d é a resistência do cabo fictício (solo),
 D_{pq} = distâncias relativas entre os cabos (calculadas no passo 1) e $D_e \dots$
- Quando $p \neq q \Rightarrow z_{pq} = (r_d) + j\omega k \left(\ln \frac{D_e}{D_{pq}} \right)$, onde:
 r_d é a resistência do cabo fictício (solo), D_{pq} = distâncias relativas entre os cabos (calculadas no passo 1).

Matriz :

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ Vu = 0 \\ Vw = 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{au} & Z_{aw} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bu} & Z_{bw} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} & Z_{cu} & Z_{cw} \\ Z_{ua} & Z_{ub} & Z_{uc} & Z_{uu} & Z_{uw} \\ Z_{wa} & Z_{wb} & Z_{wc} & Z_{wu} & Z_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_u \\ I_w \end{bmatrix}$$

4º passo: redução de Kron:

- Fórmula da redução de Kron – eliminar linhas e colunas dos para-raios:
 - Eliminação da linha e coluna u :
 - $z_{ij}^{novo} = z_{ij} = \frac{z_{iu} * z_{ui}}{z_{uu}}$
 - Aplicar novamente a redução, agora na linha e coluna w , obtendo uma matriz 3x3.

5º passo: Obter as componentes simétricas (0,2) pontos

$z_{012} = A^{-1} z_{123} A$, onde z_{123} é a matriz com redução de Kron, e A é matriz de Fortescue:

Nº



$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$$

Item b) Cálculo das admitâncias pelo método das imagens (1,0 ponto)

1º passo: Obtenção das distâncias pelo método das imagens (0,3 pontos)

Aplicar os métodos trigonométricos assim como feito no primeiro passo do item a para encontrar todas as distâncias na Figura b.1.

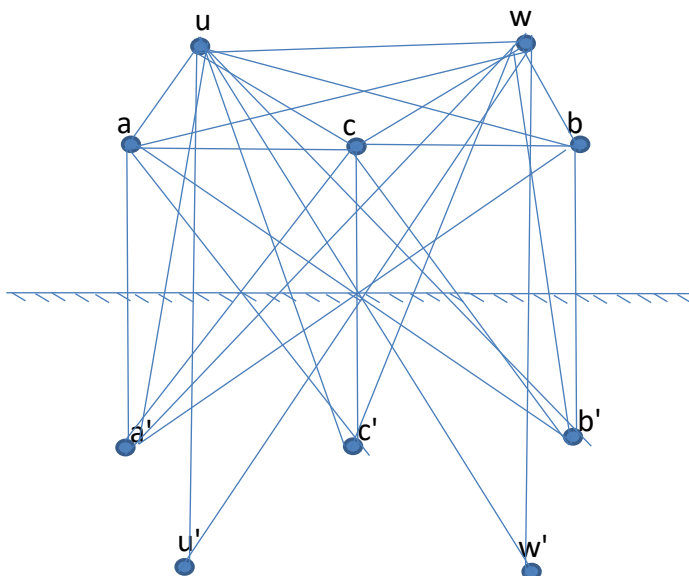


Figura b.1 – espelhamento das imagens

2º passo: Obter a matriz potencial: (0,3 pontos)

- Quando $i = j \Rightarrow p_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(\ln \frac{H_i}{r_i} \right)$, onde: H_i = distância entre o condutor(para-raios) e sua respectiva imagem espelhada e r_i = raio do condutor(para-raios).
- Quando $i \neq j \Rightarrow p_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon} \left(\ln \frac{H_{ij}}{D_{ij}} \right)$, onde: H_{ij} = distância entre o condutor(para-raios) i e a imagem espelhada j , e D_{ij} = distância entre os condutores (para-raios) reais.

3º passo: Obter a matriz dos coeficientes de Maxwell: (0,2 pontos)

$C = P^{-1}$, onde P é a matriz p_{ij} , cujos elementos são definidos no 2º passo.

4º passo: Obter as componentes simétricas: (0,2 pontos)

$y_{012} = A^{-1}y_{123}A$, onde z_{123} é a matriz C com redução de Kron, e A é matriz de fortescue:

Nº $A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}$



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA CELSO SUCKOW DA FONSECA
COORDENADORIA DE CONCURSOS - CCONC
EDITAL Nº 02/2026 – Professor Efetivo



Nº

Pag.