EDITAL 02/2026 – PROVA ESCRITA

***CAMPUS*: MARACANÃ**
Área do Conhecimento: MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA

1) [Total: 2,0 pontos] No livro *A Matemática do Ensino Médio (vol. 1)*, LIMA *et al*. (1997) afirmam que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Com base nesta definição, disserte sobre o conceito de função afim que contemple:

(i) **[0,5 ponto]** seus casos particulares, características como taxa de variação e interseções com os eixos;

(ii) **[0,5 ponto]** pelo menos um exemplo contextualizado que aborde o crescimento ou decrescimento da função;

(iii) **[0,5 ponto]** uma demonstração de que o gráfico de toda função afim é uma reta e, por outro lado, de que toda reta não vertical é gráfico de uma função afim;

(iv) **[0,5 ponto]** uma proposta de atividade de ensino estruturada para estudantes do Ensino Médio que explore o gráfico deste tipo de função.

Resolução:

Para contemplar (i):

O texto deve conter os seguintes conceitos:

- **Caso $\boldsymbol{a \neq 0}$:** $f(x) = ax + b$ é função polinomial do 1° grau, e **se $\boldsymbol{b = 0}$**, $f(x) = ax$, função linear;
- **Caso $\boldsymbol{a = 0}$:** $f(x) = b$, função constante;
- **Taxa de variação:** Sejam $x_1 \neq x_0$, a taxa de variação da função f no intervalo $[x_0, x_1]$ é dada por $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{ax_1+b-(ax_0+b)}{x_1-x_0} = \frac{a(x_1-x_0)}{x_1-x_0} = a$. Portanto, a taxa é constante e igual a a.
- **Interseções com os eixos:** quando $x = 0$, temos $f(0) = b$, logo o ponto $(0, b)$ é a interseção do gráfico com o eixo vertical. Quando $f(x) = 0$, temos $ax + b = 0 \Longrightarrow x = -\frac{b}{a}$ se $a \neq 0$, neste caso $-\frac{b}{a}$ chama-se zero da função e o ponto $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ é a interseção do gráfico com o eixo horizontal.

Para contemplar (ii):

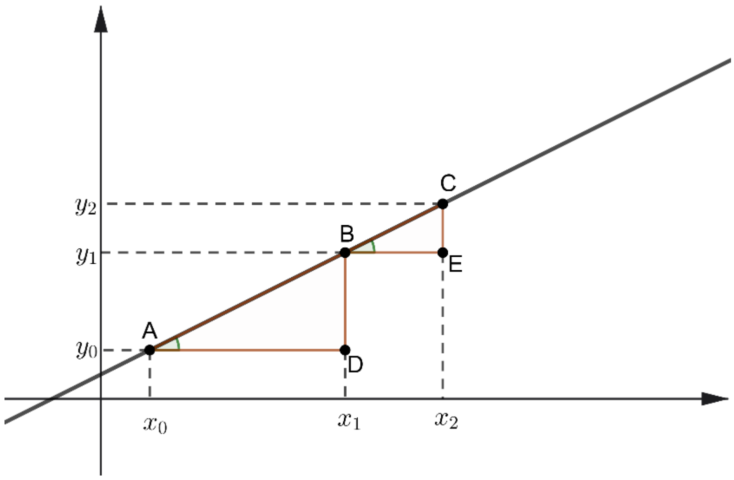
Há diferentes problemas que podem ser modelados por uma função afim. São eles: cálculo de tarifas de táxi (bandeirada fixa + valor por km), cálculo de salário de um vendedor (valor fixo + comissão por vendas), cálculo de custos mensais de uma fábrica (custo fixo + custos variáveis por unidade produzida), nível de um tanque que esvazia ou enche a uma taxa constante, conversão de unidades de temperatura como Fahrenheit e Celsius, distância percorrida no movimento retilíneo uniforme, cálculo de juros ou do montante no regime de juros simples e outros.

Para contemplar (iii):

- O gráfico de toda função afim é uma reta: Há várias demonstrações. Uma delas é a seguinte:

Caso $a \neq 0$

Tome quaisquer 3 pontos distintos do gráfico da função. Sejam eles $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ e $C(x_2, y_2)$. A figura abaixo mostra o caso em que $a > 0$.



As taxas de variação da função nos intervalos $[x_0, x_1]$ e $[x_1, x_2]$ são, respectivamente:

$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = a$ e $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Isto é, ambas são iguais a a. Isto significa que os triângulos retângulos ABD e BCE têm lados proporcionais, logo são semelhantes e, portanto, os ângulos $B\hat{A}D$ e $C\hat{B}E$ são congruentes. Assim, concluimos que os pontos A, B e C são colineares.

Caso $a = 0$

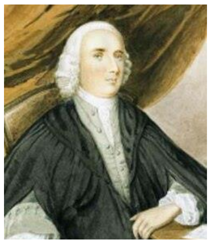
A função é constante e o gráfico é uma reta paralela (ou coincidente) ao eixo das abscissas.

- Toda reta não vertical é gráfico de uma função afim: seja uma reta não vertical r. Tome 2 pontos distintos desta reta. Existe uma função afim g cujo gráfico passa pelos mesmos 2 pontos. Já provamos que este gráfico é uma reta e sabemos que 2 pontos distintos determinam uma única reta. Logo, a reta r é gráfico da função g.

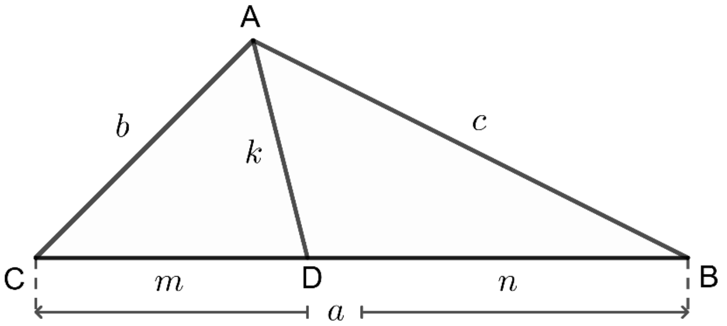
Para contemplar (iv):

Espera-se que o candidato escreva um breve roteiro da atividade, explorando pelo menos um recurso didático, que pode ser, desde uma folha de papel quadriculado até um software de matemática como o Geogebra. Este roteiro deve conter alguns exemplos de diferentes funções afins, que evidenciem pelo menos um dos seguintes aspectos do comportamento do gráfico: crescimento ou decrescimento, translação, sinais da função ou comparação de diferentes taxas de crescimento.

2) [Total: 2,0 pontos] Em 1746, o matemático escocês Matthew Stewart publicou uma relação válida para triângulos quaisquer ABC, como na figura abaixo.



Matthew Stewart
(1717-1785)

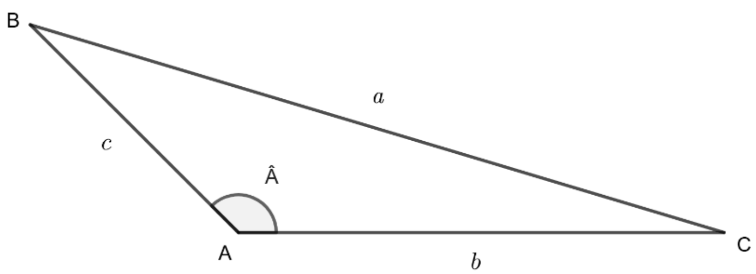


Como se pode observar, uma ceviana AD = k, divide o lado BC em CD = m e DB = n. Atualmente, esta relação é conhecida como Teorema de Stewart, que relaciona a, b, c, m, n e k, conforme abaixo.

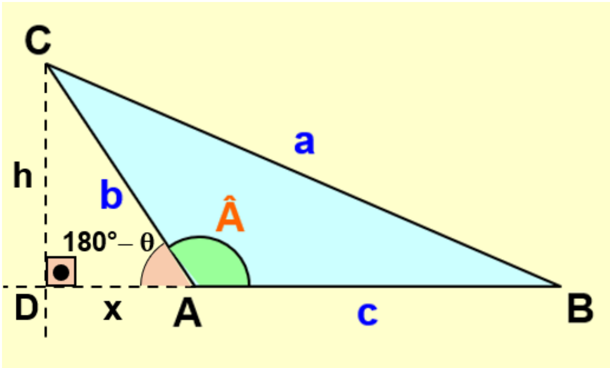
$$\frac{b^2}{a.m} - \frac{k^2}{m.n} + \frac{c^2}{a.n} = 1$$

Considerando as informações apresentadas, resolva os itens a seguir:

a) **[0,6 ponto]** Considerando o triângulo obtusângulo abaixo, demonstre que $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}$.



Resolução:



Prolongando o lado AB e traçando a altura CD relativa a esse lado, obtemos dois triângulos retângulos que são: DCA e DCB. Aplicando o Teorema de Pitágoras a esses triângulos, obtemos: $\begin{cases} b^2 = h^2 + x^2 \\ a^2 = h^2 + (x+c)^2 \end{cases}$.

Desenvolvendo a segunda equação, chegamos a: $a^2 = h^2 + x^2 + c^2 + 2.x.c$.

Logo temos: $a^2 = b^2 + c^2 + 2.x.c$.

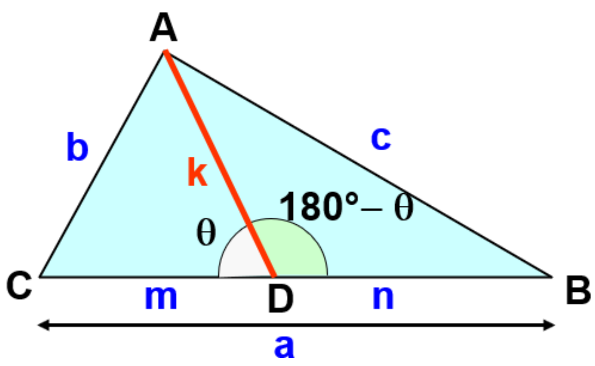
No triângulo DÂC, temos: $\cos(180 - \hat{A}) = \frac{x}{b}$ ou $-\cos\hat{A} = \frac{x}{b}$ ou ainda, $x = -b.\cos\hat{A}$.

Teremos então que: $a^2 = b^2 + c^2 + 2.(-b.\cos\hat{A}).c$

Finalizando, obtemos: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos\hat{A}}$.

b) **[0,6 ponto]** Demonstre o Teorema de Stewart.

Resolução:



Aplicando a Lei dos Cossenos aos triângulos ADC e ADB, temos:

$$\begin{cases} b^2 = m^2 + k^2 - 2.m.k.\cos\theta \\ c^2 = n^2 + k^2 - 2.n.k.\cos(180° - \theta) \end{cases}$$

Na segunda equação, fazemos uma redução ao 1º quadrante, chegando a:

$$\begin{cases} b^2 = m^2 + k^2 - 2.m.k.\cos\theta \\ c^2 = n^2 + k^2 + 2.n.k.\cos\theta \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por n e a 2ª por m, obtemos:

$$\begin{cases} b^2.n = m^2.n + k^2.n - 2.m.n.k.\cos\theta \\ c^2.m = n^2.m + k^2.m + 2.m.n.k.\cos\theta \end{cases}$$

Somando-as, temos:

$$b^2.n + c^2.m = m^2.n + m.n^2 + k^2.m + k^2.n$$

Efetuando-se uma fatoração por agrupamento no membro da direita, obtemos:

$$b^2.n + c^2.m = m.n.(m+n) + k^2.(m+n)$$

Pela figura, temos que m + n = a. Logo temos:

$$b^2.n + c^2.m = a.m.n + k^2.a$$

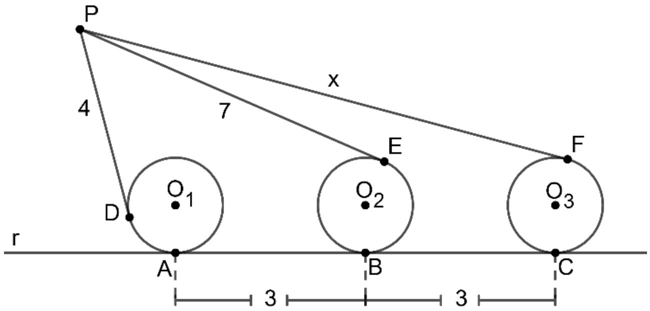
Passando $k^2.a$ para o membro da esquerda temos:

$$b^2.n - k^2.a + c^2.m = a.m.n$$

Dividindo toda a equação por $a.m.n$, obtemos: $\dfrac{b^2.n}{a.m.n} - \dfrac{k^2.a}{a.m.n} + \dfrac{c^2.m}{a.m.n} = \dfrac{a.m.n}{a.m.n}$

$$\boxed{\frac{b^2}{a.m} - \frac{k^2}{m.n} + \frac{c^2}{a.n} = 1}$$

c) **[0,8 ponto]** A figura abaixo mostra três círculos congruentes de centros em O_1, O_2 e O_3, tangenciados pela reta r nos pontos A, B e C.



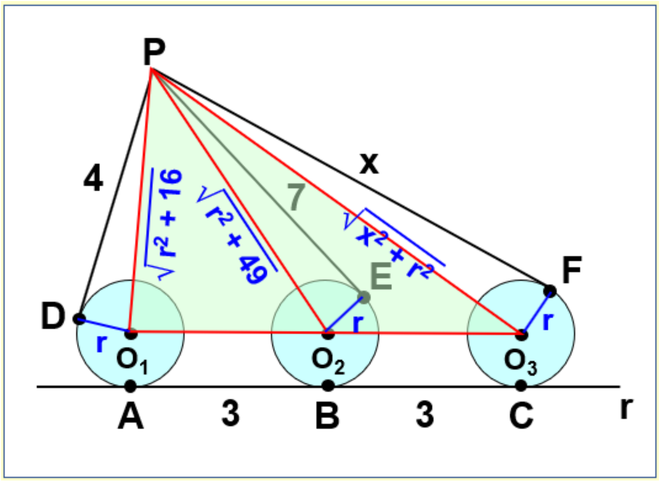
Partindo do ponto P, são traçados os segmentos PD = 4 cm, PE = 7 cm e PF = x cm que tangenciam as três circunferências.

Obtenha a medida x em centímetros.

Resolução:

Traçamos os raios nos pontos de contato das tangentes.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos PO_1, PO_2 e PO_3.



Aplicando o Teorema de Stewart, temos:

$$\frac{\left(\sqrt{r^2+16}\right)^2}{6.3}-\frac{\left(\sqrt{r^2+49}\right)^2}{3.3}+\frac{\left(\sqrt{x^2+r^2}\right)^2}{6.3}=1$$

$$\frac{r^2+16}{18}-\frac{r^2+49}{9}+\frac{x^2+r^2}{18}=1$$

$$r^2+16-2r^2-98+x^2+r^2=18$$

$$x^2=100\Rightarrow x=10$$

Resposta: $\boxed{x=10}$

3) [Total: 2,0 pontos] Seja VABC um tetraedro regular cujas coordenadas de três dos seus vértices, em $\mathbb{R}^3$, são iguais a $A(1,-1,-2)$, $B(-2,1,-1)$ e $C(-1,-2,1)$.

a) **[1,0 ponto]** Encontre as coordenadas do vértice V, sabendo que sua abscissa é positiva.

Resolução 1:

Para obter as coordenadas de V, é preciso seguir os seguintes passos:

1) encontrar as coordenadas do ponto P, que é a projeção ortogonal de V no plano que contém a base ABC. Como P é o baricentro do triângulo ABC, tem-se que $P=\dfrac{A+B+C}{3}=\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

2) determinar a equação do plano π, que contém a base ABC.

Como a soma das coordenadas dos pontos A, B e C é sempre igual a -2, segue que $x+y+z=-2$ é a equação do plano π cujo vetor normal é $\vec{n}=(1,1,1)$.

3) determinar a equação da reta que passa P e tem vetor diretor igual ao vetor normal do plano π e observar que V é um ponto dessa reta.

A equação da reta em questão é dada por $\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)+t\cdot(1,1,1)\quad(t\in\mathbb{R})$. Como V é um ponto dessa reta, então $V=\left(-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)+t\cdot(1,1,1)$, para algum $t\in\mathbb{R}$.

4) calcular a altura do tetraedro e igualar a distância de V ao plano π.

A altura de um tetraedro regular de aresta a é igual a $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$. Como $a=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{14}$, tem-se que a altura é igual a $\dfrac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$. Por outro lado, a distância de V ao plano π é igual a $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left|\dfrac{-2+3t}{3}+\dfrac{-2+3t}{3}+\dfrac{-2+3t}{3}+2\right|$.

Igualando a altura a esta distância, temos que $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left|\dfrac{-2+3t}{3}+\dfrac{-2+3t}{3}+\dfrac{-2+3t}{3}+2\right|=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\Rightarrow$

$|-2+3t+2|=2\sqrt{7}\Rightarrow t=\pm\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$.

Como a abscissa é positiva, devemos ter $t=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$ e, portanto, $V=\left(\dfrac{-2+2\sqrt{7}}{3},\dfrac{-2+2\sqrt{7}}{3},\dfrac{-2+2\sqrt{7}}{3}\right)$.

Resposta: $\boxed{V=\left(\dfrac{-2+2\sqrt{7}}{3},\dfrac{-2+2\sqrt{7}}{3},\dfrac{-2+2\sqrt{7}}{3}\right)}$

Resolução 2:

Como o tetraedro é regular, todas as suas arestas possuem o mesmo comprimento, que no caso vale $\sqrt{14}$. Assim, $d_{VA} = d_{VB} = d_{VC} = \sqrt{14}$. Se $V = (x, y, z)$ são as coordenadas do vértice V, com $x > 0$, então temos que

$$d_{VA} = \sqrt{14} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 14$$

$$d_{VB} = \sqrt{14} \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 14$$

$$d_{VC} = \sqrt{14} \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 14$$

Expandindo as equações acima e fazendo as subtrações para eliminar os termos quadráticos, obtemos as equações $3x - 2y - z = 0, x - 3y + 2z = 0$ e $2x + y - 3z = 0$, cuja solução, no contexto do problema, deve ser da forma (x, x, x), para algum $x > 0$. Escolhendo qualquer uma das três equações acima e fazendo $y = x$ e $z = x$, obtemos a equação $3x^2 + 4x - 8 = 0$ cuja solução que nos contempla é $x = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$. Dessa forma, as coordenadas de V são $\left(\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+2\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+2\sqrt{7}}{3}\right)$.

Resposta: $\boxed{V = \left(\frac{-2+2\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+2\sqrt{7}}{3}, \frac{-2+2\sqrt{7}}{3}\right)}$

b) **[1,0 ponto]** Admita que as faces deste tetraedro foram numeradas com os números 1, 2, 3 e 4. Considere o experimento que consiste em lançar 3 vezes seguidas este tetraedro e anotar, em cada lançamento, o número que fica na face oculta (face debaixo). Para cada $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, denote por P_k a probabilidade de se obter o número k na face oculta. Sabe-se que:

- o dado é viciado de tal forma que P_1, P_2, P_3 e P_4, nessa ordem, formam uma progressão aritmética crescente;
- os lançamentos são independentes entre si;
- a probabilidade de obter-se 3 números distintos em ordem crescente é igual a 5%.

Determine o valor de P_1.

Resolução:

As possibilidades de se obter números distintos em ordem crescentes são (1, 2, 3), (1, 2, 4); (1, 3, 4) e (2, 3, 4). Como os lançamentos são independentes entre si e tal probabilidade é igual a 5%, tem-se que $P_1P_2P_3 + P_1P_2P_4 + P_1P_3P_4 + P_2P_3P_4 = 0,05$. As probabilidades P_1, P_2, P_3 e P_4 formam uma progressão aritmética crescente de 4 termos, logo podemos escrevê-la na forma $P_1 = a - 3r$, $P_2 = a - r$, $P_3 = a + r$ e $P_4 = a + 3r$.

Como $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$, tem-se que $a = \frac{1}{4}$ e, portanto, $P_1 = \frac{1-12r}{4}$, $P_2 = \frac{1-4r}{4}$, $P_3 = \frac{1+4r}{4}$ e $P_4 = \frac{1+12r}{4}$. Como

$$P_1P_2P_3 + P_1P_2P_4 + P_1P_3P_4 + P_2P_3P_4 = 0,05 \Rightarrow$$

$$\frac{(1-12r)(1-16r^2)}{64} + \frac{(1-144r^2)(1-4r)}{64} + \frac{(1-144r^2)(1+4r)}{64} + \frac{(1-16r^2)(1+12r)}{64} = 0,05 \Rightarrow$$

$$\frac{4-320r^2}{64} = 0,05 \Rightarrow r = 0,05 \text{ (PA crescente).}$$

Assim, $P_1 = a - 3r = 0,25 - 3 \cdot 0,05 \Rightarrow P_1 = 0,1$

Resposta: $\boxed{P_1 = 0,1}$

4) **[Total: 2,0 pontos]** Considere a matriz $\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) **[1,0 ponto]** Calcule a matriz inversa da matriz $\mathbf{W}$.

Resolução 1: Por sistema

A matriz $\mathbf{W}$ é invertível pois seu determinante ser diferente de zero. Assim, devemos encontrar $\mathbf{W}^{-1}$ que satisfaça $\mathbf{W}.\mathbf{W}^{-1} = \mathbf{I}$, ou seja,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} . \underbrace{\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}^{-1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}}.$$

Por retro substituição chegamos que $m = n = o = i = j = c = d = e = 0$, $a = f = k = p = 1$, $b = -1, g = -2,\ h = 3$ e $l = -3$.

Resposta: $\mathbf{W}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Resolução 2: Por escalonamento

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_4]{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I **W**$^{-1}$

b) **[1,0 ponto]** Determine o menor valor de $n \in \mathbb{N}$ para que o elemento da primeira linha e quarta coluna de $\mathbf{W}^n$ seja maior ou igual a 273.

Resolução 1: Usando matriz nilpotente

Podemos escrever:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{W}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}}$$

$$\mathbf{W}^n = (\mathbf{I}+\mathbf{N})^n = \binom{n}{0}\mathbf{I}^n + \binom{n}{1}\mathbf{I}^{n-1}\mathbf{N} + \binom{n}{2}\mathbf{I}^{n-2}\mathbf{N}^2 + \binom{n}{3}\mathbf{I}^{n-3}\mathbf{N}^3 + \binom{n}{4}\mathbf{I}^{n-4}\cancel{\mathbf{N}^4}^{\,0} + \ldots + \binom{n}{n}\cancel{\mathbf{N}^n}^{\,0}$$

N é nilpotente para n = 4.

$$\Rightarrow 1.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{W}^{n}\Rightarrow a_{14}=3.n+9.\frac{n.(n-1)}{2}+n(n-1)(n-2)\geq 273$$

$$2n^{3}+3n^{2}+n-546\geq 0$$

Pelo teorema das raízes racionais e sendo $n\in\mathbb{N}$ temos que $n\in\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 13,\ 14,\ 21,\ 26,\ 39,\ 42,\ 78,\ 91,\ 182,\ 273,\ 546\}$. Dessa forma, chegamos em n = 6 como a menor possibilidade que satisfaz a inequação.

Resposta: O menor valor de n é 6.

Resolução 2: Usando multiplicação de matrizes

$N := Matrix([[0, 1, 2, 3], [0, 0, 2, 3], [0, 0, 0, 3], [0, 0, 0, 0]])$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$seq(N^{j}, j = 1..10)$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = convert(N + IdentityMatrix(4), matrix) : W := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}:$$

$seq(W^{j}, j = 1..10)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 15 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 & 12 & 42 \\ 0 & 1 & 6 & 27 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 20 & 90 \\ 0 & 1 & 8 & 48 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 & 30 & 165 \\ 0 & 1 & 10 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 6 & 42 & 273 \\ 0 & 1 & 12 & 108 \\ 0 & 0 & 1 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 7 & 56 & 420 \\ 0 & 1 & 14 & 147 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 8 & 72 & 612 \\ 0 & 1 & 16 & 192 \\ 0 & 0 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 9 & 90 & 855 \\ 0 & 1 & 18 & 243 \\ 0 & 0 & 1 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 10 & 110 & 1155 \\ 0 & 1 & 20 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: O menor valor de n é 6.

5) [Total: 2,0 pontos] A organização do espaço urbano não é neutra: decisões relacionadas ao desenho de praças, calçadas, mobiliário urbano e circulação podem favorecer ou restringir o acesso de determinados grupos sociais. Elementos associados à chamada “arquitetura hostil” evidenciam como o espaço pode ser projetado para limitar permanência, circulação e apropriação por diferentes sujeitos.

Considerando o papel da Geometria e da Trigonometria na leitura e interpretação do espaço, elabore uma proposta de situação de ensino para o Ensino Médio à luz da Educação Matemática Crítica em que conceitos geométricos e/ou trigonométricos sejam utilizados para analisar um espaço urbano (real ou simulado), com foco em acessibilidade, mobilidade ou uso do espaço.

Sua resposta precisa apresentar de forma articulada:

(i) **[0,4 ponto]** os objetivos da atividade;

(ii) **[0,4 ponto]** a descrição da tarefa;

(iii) **[0,4 ponto]** os conceitos matemáticos mobilizados;

(iv) **[0,4 ponto]** como a proposta possibilita problematizar desigualdades no uso do espaço;

(v)**[0,4 ponto]** que tipo de leitura crítica da realidade pode ser desenvolvida e quais limites e desafios para sua implementação no contexto escolar.

Resolução:

Para contemplar (i):

- Apresentar objetivos coerentes com o ensino de Geometria e com a análise crítica do espaço urbano com foco na acessibilidade;
- Demonstrar coerência didático-metodológica entre objetivos, tarefa e conceitos mobilizados.

Para contemplar (ii):

- Descrever uma situação de ensino ou tarefa investigativa contextualizada (real ou simulada), envolvendo análise de espaços urbanos foco na acessibilidade, mobilidade ou uso do espaço;
- Apresentar clareza, organização textual e articulação adequada entre os elementos da proposta;
- Utilizar linguagem compatível com o contexto do Ensino Médio e com a prática docente em Matemática.

Para contemplar (iii):

- Demonstrar domínio conceitual, capacidade argumentativa e articulação teórico-prática;
- Mobilizar corretamente conceitos geométricos pertinentes (área, perímetro, escalas, ângulos, localização, proporção, geometria espacial, acessibilidade, circulação etc.);
- Articular os conceitos geométricos à análise de acessibilidade, mobilidade, circulação ou uso do espaço urbano.

Para contemplar (iv):

- Discutir como a atividade possibilita problematizar desigualdades no uso do espaço urbano foco na acessibilidade;
- Evidenciar como a proposta favorece leitura crítica da realidade, discutindo inclusão, exclusão, acessibilidade ou arquitetura hostil.

Para contemplar (v):

- Relacionar explicitamente a proposta à Educação Matemática Crítica analisando possibilidade de leitura crítica das desigualdades no uso do espaço foco na acessibilidade;
- Apontar limites, desafios ou tensões de implementação da atividade no contexto escolar.

BAREMA DA PROVA DE MATEMÁTICA

CAMPUS: MARACANÃ

Questão 1

Conteúdo	Abordou	Pontuação
i)	Caso função linear	0,1
	Caso função constante	0,1
	Taxa de variação	0,2
	Interseções com os eixos	0,1
	Total:	0,5

Conteúdo	Aspectos	Pontuação
ii)	Adequação ao tema função afim*	0,2
	Abordou o crescimento ou decrescimento da função	0,2
	Adequação da contextualização	0,1
	Total:	0,5

*O candidato só pontuará nos outros aspectos do conteúdo ii) se pontuar neste.

Conteúdo	Etapas	Pontuação
iii)	O gráfico de toda função afim é uma reta	0,3
	Toda reta não vertical é gráfico de uma função afim	0,2
	Total:	0,5

Conteúdo	Aspectos	Pontuação
iv)	Mencionou algum recurso didático	0,1
	Explorou algum comportamento do gráfico	0,2
	Criatividade	0,1
	Clareza	0,1
	Total:	0,5

Questão 2

Item	Procedimento	Pontuação
a)	Escreveu uma das aplicações do Teorema de Pitágoras.	0,1
	Escreveu a outra das aplicações do Teorema de Pitágoras.	0,1
	Achou a relação decorrente dessas duas equações anteriores eliminando o h.	0,1
	Achou $\cos(180° - \hat{A}) = x/b$ e aplicou a redução ao 1° quadrante.	0,1
	Substituiu o valor de x na relação decorrente.	0,1
	Obteve a Lei dos Cossenos	0,1
	Total:	0,6

Item	Procedimento	Pontuação
b)	Aplicou a Lei dos Cossenos para os triângulos ADC e ADB.	0,1
	Fez a redução ao 1º Quadrante.	0,1
	Multiplicou as equações por n e m.	0,1
	Somou as equações obtidas.	0,1
	Fez as duas fatorações colocando **a = m + n**.	0,1
	Dividiu toda a equação por **a.m.n**, chegando ao Teorema de Stewart na versão proposta pelo enunciado.	0,1
	Total:	0,6

Item	Procedimento	Pontuação
c)	Chegou a PO_1 em função de r, após aplicar o Teorema de Pitágoras	0,1
	Chegou a PO_2 em função de r, após aplicar o Teorema de Pitágoras	0,1
	Chegou a PO_3 em função de x e r, após aplicar o Teorema de Pitágoras	0,1
	Ligou os pontos O_1, O_2 e O_3.	0,1
	Aplicou o Teorema de Stewart.	0,1
	Reduziu a equação acima após aplicar o MMC.	0,1
	Chegou ao resultado x = 10.	0,2
	Total:	0,8

Questão 3

Item	1º Modo de Resolução	Pontuação
a)	Identificou que o "pé da altura" do tetraedro regular com o baricentro.	0,1
	Calculou as coordenadas do baricentro	0,1
	Encontrou a equação do plano que passa pelos pontos A, B e C	0,2
	Encontrou a equação da reta que passa pelo baricentro e tem vetor diretor paralelo ao vetor normal	0,2
	Identificou a altura do tetraedro	0,1
	Relacionou a altura do tetraedro com a distância de V ao plano que passa por A, B e C	0,2
	Resolveu a equação obtida na relação anterior e considerando o "t" que torna a abscissa de V positiva	0,1
	Total:	1,0

item	2º Modo de Resolução	Pontuação
a)	Fez as distâncias de V aos vértices A, B e C, usou as equações obtidas e recaiu no sistema linear homogêneo: $3x - 2y - z = 0, 2x + y - 3z = 0$ e $x - 3y + 2z = 0$.	0,3
	Resolveu o sistema e concluiu que $V = (x, x, x)$ para algum $x > 0$	0,2
	Fez a distância de V a qualquer vértice e igualou a $\sqrt{14}$	0,2
	Resolveu a equação considerando que $x > 0$	0,3
	Total:	1,0

Item	Procedimento	Pontuação
b)	Identificou as possibilidades de se obter números distintos em ordem crescente	0,1
	Construiu a progressão aritmética em questão e relacionou com a soma das probabilidades ser igual a 1	0,2
	Percebeu que $P_1P_2P_3 + P_1P_2P_4 + P_1P_3P_4 + P_2P_3P_4 = 0{,}05$	0,2
	Usou a relação obtida na PA com a relação anterior para construir a equação	0,4
	Encontrou o valor de P_1	0,1
	Total:	1,0

Questão 4

Item	Resolução através de sistema	Pontuação
a)	Escreveu a propriedade $\mathbf{W}.\mathbf{W}^{-1}=\mathbf{I}$	0,3
	Escreveu o sistema corretamente	0,1
	Resolveu o sistema corretamente	0,4
	Escreveu a matriz $\mathbf{W}^{-1}$	0,2
	Total:	1,0

Item	Resolução através de escalonamento	Pontuação
a)	1ª operação linear	0,2
	2ª operação linear	0,2
	3ª operação linear	0,2
	4ª operação linear	0,2
	Escreveu a matriz $\mathbf{W}^{-1}$	0,2
	Total:	1,0

Item	Resolução usando matriz nilpotente	Pontuação
b)	Escreveu $\mathbf{W}=\mathbf{I}+\mathbf{N}$	0,2
	Usou expansão binomial	0,2
	Identificou que é $\mathbf{N}$ nilpotente para n = 4	0,2
	Chegou na inequação $2n^3+3n^2+n-546\geq 0$	0,2
	Obteve $n = 6$	0,2
	Total:	1,0

Item	Resolução usando multiplicação de matrizes	Pontuação
b)	Escreveu $\mathbf{W}^2$ corretamente	0,2
	Escreveu $\mathbf{W}^3$ corretamente	0,1
	Escreveu $\mathbf{W}^4$ corretamente	0,2
	Escreveu $\mathbf{W}^5$ corretamente	0,1
	Escreveu $\mathbf{W}^6$ corretamente	0,2
	Concluiu que $n = 6$	0,2
	Total:	1,0

Questão 5

item	Procedimento	Pontuação
(i)	Apresentou objetivos coerentes com o ensino de Geometria e com a análise crítica do espaço urbano com foco na acessibilidade	0,2
(i)	Demonstrou coerência didático-metodológica entre objetivos, tarefa e conceitos mobilizados	0,2
(ii)	Descreveu uma situação de ensino ou tarefa investigativa contextualizada (real ou simulada), envolvendo análise de espaços urbanos foco na acessibilidade, mobilidade ou uso do espaço	0,2
(ii)	Apresentou clareza, organização textual e articulação adequada entre os elementos da proposta	0,1
(ii)	Utilizou linguagem compatível com o contexto do Ensino Médio e com a prática docente em Matemática	0,1
(iii)	Demonstrou domínio conceitual, capacidade argumentativa e articulação teórico-prática	0,1
(iii)	Mobilizou corretamente conceitos geométricos pertinentes (área, perímetro, escalas, ângulos, localização, proporção, geometria espacial, acessibilidade, circulação etc.)	0,2
(iii)	Articulou os conceitos geométricos à análise de acessibilidade, mobilidade, circulação ou uso do espaço urbano	0,1
(iv)	Discutiu como a atividade possibilita problematizar desigualdades no uso do espaço urbano foco na acessibilidade	0,2
(iv)	Evidenciou como a proposta favorece leitura crítica da realidade, discutindo inclusão, exclusão, acessibilidade ou arquitetura hostil	0,2
(v)	Relacionou explicitamente a proposta à Educação Matemática Crítica analisando possibilidade de leitura crítica das desigualdades no uso do espaço foco na acessibilidade	0,3
(v)	Apontou limites, desafios ou tensões de implementação da atividade no contexto escolar	0,1
	Total:	2,0