



**EDITAL 02/2026 – PROVA ESCRITA**

**Critérios de correção:** Matemática – Nova Friburgo

**Questão 1**

**(a) (1,2 pontos)**

- Construir explicitamente o fator integrante  $\psi(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds}$ , apresentando o cálculo da integral e a obtenção da expressão final de  $\psi(t)$ . **(0,3)**
- Verificar explicitamente a propriedade de equação exata após a multiplicação por  $\psi(t)$ , isto é, mostrar que  $(\psi(t)y(t))' = \psi(t)b(t)$ . **(0,3)**
- Expressar corretamente a solução geral  $y(t) = \frac{1}{\psi(t)} \left[ \int_{t_0}^t \psi(s)b(s) ds + C \right]$ . **(0,3)**
- Identificar os termos correspondentes a  $y_p(t) = \frac{1}{\psi(t)} \int_{t_0}^t \psi(s)b(s) ds$  e  $y_h(t) = \frac{C}{\psi(t)}$  na expressão obtida, verificando que  $y_p$  satisfaz a equação não homogênea e que  $y_h$  satisfaz a equação homogênea associada. **(0,3)**

**(b) (0,8 pontos)**

- Manipular corretamente a expressão da solução para estudar o limite quando  $t \rightarrow +\infty$ , por meio de argumento rigoroso (forma integral, Regra de L'Hôpital ou equivalente) — aceita-se qualquer abordagem desde que devidamente justificada. **(0,4)**
- Aplicar corretamente as hipóteses

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = c > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = L,$$

justificando o comportamento assintótico de  $\psi(t)$  e verificando adequadamente a indeterminação envolvida (tratando separadamente os casos  $L \neq 0$  e  $L = 0$ , ou por argumento unificado equivalente). **(0,2)**

- Concluir corretamente que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \frac{L}{c}$$

para toda solução. **(0,2)**

## Questão 2

### (a) (0,6 ponto)

- Determinar corretamente os intervalos de análise para  $y$  ( $y < 0$ ,  $0 \leq y < c$  e  $y \geq c$ ). **(0,15)**
- Justificar corretamente a passagem entre eventos, especialmente a demonstração de que  $\{Y \leq y\} = \{X \leq y\}$  para  $0 \leq y < c$ . **(0,15)**
- Obter corretamente a expressão analítica de  $F_Y(y)$  em todos os ramos, incluindo o cálculo da integral da densidade de  $X$ . **(0,15)**
- Identificar explicitamente o ponto de descontinuidade em  $y = c$  e calcular corretamente o salto  $P(Y = c) = \frac{1}{1+c}$ . **(0,15)**

### (b) (0,8 ponto)

- Identificar corretamente a componente discreta da distribuição, observando que  $P(Y = c) = \frac{1}{1+c}$ , isto é, que há probabilidade concentrada no ponto  $c$ . **(0,25)**
- Identificar corretamente a componente absolutamente contínua da distribuição, determinando sua densidade no intervalo  $(0, c)$ ,  $g(y) = \frac{1}{(1+y)^2}$ ,  $0 < y < c$ , ou apresentando corretamente a função de distribuição correspondente. **(0,25)**
- Verificar corretamente a consistência da decomposição, mostrando que as componentes discreta e absolutamente contínua reproduzem a distribuição de  $Y$  e possuem probabilidade total igual a 1. **(0,20)**
- Discutir corretamente a componente singular contínua, concluindo justificadamente que ela não existe. **(0,10)**

### (c) (0,6 ponto)

- Calcular corretamente  $E[Y] = \ln(1+c)$ , utilizando a decomposição da distribuição ou escrevendo a esperança em termos das probabilidades da cauda. **(0,20)**
- Demonstrar corretamente que  $E[X] = +\infty$ , mostrando adequadamente a divergência da integral correspondente. **(0,20)**
- Discutir corretamente o impacto da transformação  $Y = \min(X, c)$ , explicando que o truncamento em  $c$  elimina a contribuição da cauda responsável pela divergência de  $E[X]$ , garantindo a finitude de  $E[Y]$ . **(0,20)**

### Questão 3

(a) (0,4 ponto)

- (0,1 ponto) Definir corretamente o conceito de núcleo do operador linear  $T$  como

$$\text{Nuc}(T) = \{v \in V; T(v) = 0\}.$$

- (0,1 ponto) Definir corretamente o conceito de imagem do operador linear  $T$ :

$$\text{im}(T) = \{T(v); v \in V\}.$$

- (0,2 ponto) Demonstrar corretamente que  $\text{Nuc}(T)$  e  $\text{im}(T)$  são subespaços vetoriais de  $V$ ,  $W$  respectivamente.

(b) (1,2 pontos)

- (0,5 ponto) Enunciar corretamente o Teorema do Núcleo e da Imagem:

**Teorema:** Sejam  $T : V \rightarrow W$  um operador linear entre dois espaços vetoriais de **dimensão finita** sobre um corpo  $k$ . Então

$$\dim V = \dim \text{Nuc}(T) + \dim \text{im}(T).$$

- (0,7 ponto) Demonstrar corretamente o Teorema do Núcleo e da Imagem. Isto pode ser feito de duas maneiras:

- Construir uma base de  $V$  à partir de uma base de  $\text{Nuc}(T)$  e da pré imagem de uma base de  $\text{im}(T)$ ;
- Demonstrando o Teorema de Isomorfismo

$$\text{im}(T) \simeq \frac{V}{\text{Nuc}(T)}$$

e que  $\dim V/U = \dim V - \dim U$  para todo subespaço vetorial  $U \subset V$ .

(c) (0,4 ponto)

- (0,2 ponto) Mostrar que se  $T$  é injetivo, então

$$\dim V = \dim \text{im}(T) \leq \dim W.$$

- (0,2 ponto) Mostrar que se  $T$  é sobrejetivo, então

$$\dim V \geq \dim \text{im}(T) = \dim W.$$

#### Questão 4

- (a) (0,5 ponto) Enunciar corretamente o critério da Hessiana para máximos e mínimos locais em duas variáveis.

**Teorema:** Sejam  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  e  $p \in U$  um ponto crítico de  $f$ . Se  $D$  é o determinante da matriz hessiana

$$H(f)(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix},$$

então

1. Se  $D < 0$  então  $p$  é um ponto de sela de  $f$ ;
2. Se  $D > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) < 0$ , então  $p$  é um ponto de máximo local de  $f$ ;
3. Se  $D > 0$  e  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) > 0$ , então  $p$  é um ponto de mínimo local de  $f$ .

- (b) (1,2 ponto)

- (0,4 ponto) Realizar o teste da primeira derivada para localizar os pontos críticos de  $f$ .
- (0,5 ponto) Calcular a matriz hessiana de  $f$  e aplicar o teste da segunda derivada a cada um dos pontos críticos encontrados no item anterior.
- (0,3 ponto) Classificar corretamente os pontos críticos de  $f$  de acordo com o item anterior.

- (c) (0,3 ponto) Enunciar a versão mais geral do critério da Hessiana.

**Teorema:** Sejam  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^2$  e  $p \in U$  um ponto crítico de  $f$ . Se

$$H(f)(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix}$$

é a matriz hessiana de  $f$  em  $p$ , então:

1. Se  $H(f)(p)$  é negativa definida, então  $p$  é um ponto de máximo local.
2. Se  $H(f)(p)$  é positiva definida, então  $p$  é um ponto de mínimo local.

### Questão 5

**(a) (1,0 ponto)**

- (0,4 ponto) Formulação correta do método da secante e *regula falsi*.
- (0,4 ponto) Analisar os critérios de convergência dos métodos corretamente.
- (0,2 ponto) Ordem de convergência.

**(b) (0,5 ponto)**

- (0,2 ponto) Cálculo correto das primeiras iterações dos métodos.
- (0,3 ponto) Análise qualitativa dos métodos.

**(c) (0,5 ponto)**

- (0,3 ponto) Pseudocódigo apresentado corretamente.
- (0,1 ponto) Análise de custo computacional.
- (0,1 ponto) Comparações e discussão.